

2025학년도 모의논술고사

자연계열

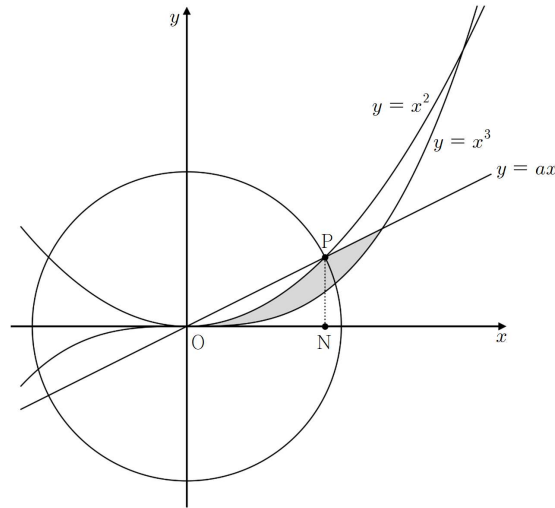


성명	
전형	
수험번호	

[문항 1] 【제시문】을 읽고 물음에 답하라.

【 제시문 】

(가) 두 곡선 $y = x^3$, $y = x^2$ 을 생각하자. 【그림1】과 같이 직선 $y = ax$ 가 제1사분면에서 곡선 $y = x^2$ 과 만나는 점을 P라 하고, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 N이라 하자. (단, $0 < a < 1$)



【그림 1】

【그림1】의 색칠된 부분과 같이 두 곡선 $y = x^3$, $y = x^2$ 과 직선 $y = ax$ 로 둘러싸인 도형을 A라 하자. A의 넓이를 $S(a)$, 직선 PN에 의해 나뉘는 A의 오른쪽 부분의 넓이를 $S_1(a)$ 라 한다.

(나) 원점을 중심으로 하고 점 P를 지나는 원을 C라 하자. 점 P에서 원 C에 그은 접선을 ℓ_1 이라 하고 점 P에서 곡선 $y = x^2$ 에 그은 접선을 ℓ_2 라 하자. 도형 A 중 원 C의 내부에 해당하는 부분의 넓이를 $T(a)$ 라 한다.

[문제 1-1] (20점) (가)에 대한 물음에 답하라.

(1) (10점) 다음 극한을 조사하라.

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{S(a)}{S_1(a)}$$

(2) (10점) $S(a) = \frac{1}{24}$ 일 때, a 의 값을 구하라.

[문제 1-2] (30점) (가)와 (나)에 대한 물음에 답하라.

(1) (10점) 두 직선 ℓ_1 과 ℓ_2 가 이루는 예각의 크기를 최소로 하는 a 의 값을 구하라.

(2) (8점) 점 $(a + a^2, (a + a^2)^3)$ 은 원 C의 외부에 있음을 증명하라.

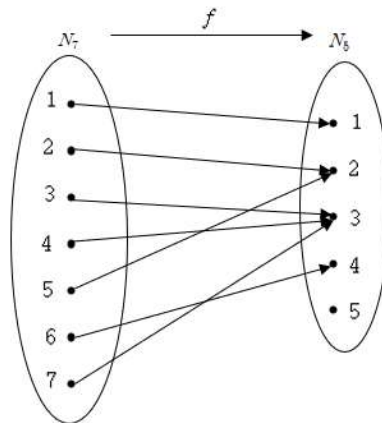
(3) (12점) 극한 $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{T(a)}{a^m}$ 의 값이 0이 아닌 실수가 되도록 하는 자연수 m 은 유일하다. 자연수 m 과 극한값을 구하라.

[문항 2] 【제시문】을 읽고 물음에 답하라.

【 제시문 】

자연수 n 에 대하여 1부터 n 까지의 자연수의 집합을 N_n 이라 하자. 예를 들어 $N_3 = \{1, 2, 3\}$ 이고 $N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이다. 함수 $f: N_m \rightarrow N_n$ 과 서로 다른 두 자연수 s 와 t 에 대하여 $f(i) = f(k) = s$ 이고 $f(j) = f(l) = t$ 를 만족하는 $1 \leq i < j < k < l \leq m$ 인 서로 다른 네 개의 자연수 i, j, k, l 이 존재하면 순서쌍 (s, t) 를 f 의 ‘반복쌍’이라 한다.

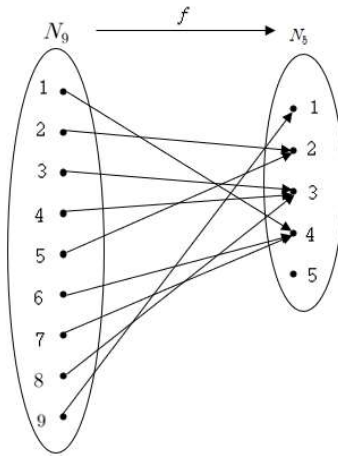
예를 들어, 【그림 2】와 같은 함수 $f: N_7 \rightarrow N_5$ 를 생각하자.



【그림 2】

$f(2) = f(5) = 2$ 이고 $f(3) = f(7) = 3$ 이므로 $(2, 3)$ 은 f 의 반복쌍이다. 한편 함숫값이 $s \in \{1, 4, 5\}$ 인 경우, $s = f(a)$ 인 $a \in N_7$ 이 한 개 이하로 존재하므로 s 가 아닌 모든 $t \in N_5$ 에 대하여 (s, t) 와 (t, s) 는 f 의 반복쌍이 아니다. 또한 $(3, 2)$ 는 f 의 반복쌍이 아님을 관찰할 수 있으므로 f 의 반복쌍은 $(2, 3)$ 뿐이다. 함숫값 $f(1), f(2), \dots, f(7)$ 을 차례로 나열한 1, 2, 3, 3, 2, 4, 3을 생각하면, 순서쌍 $(2, 3)$ 이 f 의 반복쌍임을 관찰할 수 있다.

[문제 2-1] (20점) 아래 그림과 같이 주어진 함수 $f: N_9 \rightarrow N_5$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.



(1) (10점) f 의 반복쌍을 모두 구하라.

(2) (10점) 9 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족하는 함수 $g: N_n \rightarrow N_5$ 가 존재함을 증명하라.

< 조 건 >

- ① f 와 g 의 반복쌍의 집합이 일치한다.
 ② $g(n-2) = 4$.

[문제 2-2] (20점) 함수 $f: N_m \rightarrow N_4$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

(1) (10점) N_4 에 속하는 서로 다른 두 자연수 s 와 t 로 이루어진 모든 순서쌍 (s, t) 가 f 의 반복쌍이도록 하는 자연수 m 의 최솟값을 구하라.

(2) (10점) 반복쌍의 집합이 $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ 인 함수 $f: N_m \rightarrow N_4$ 가 존재할 수 없음을 증명하라.

[문제 2-3] (10점) 다음 조건을 만족하는 함수 $f: N_n \rightarrow N_n$ 의 개수를 a_n 이라 할 때, $\frac{a_n}{n} > 2025$ 를 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하라.

< 조 건 >

- ① f 의 반복쌍은 존재하지 않는다.
 ② f 의 치역의 원소의 개수가 2 이하이다.